

## Signaux et Systèmes

### Chapitre 11

# Analyse fréquentielle des systèmes discrets

Avril 2022

## TABLE DES MATIÈRES

---

- 11.1 IMPLÉMENTATION DU FILTRAGE
- 11.2 ANALYSE DES FILTRES NUMÉRIQUES
- 11.3 SYNTHÈSE DE FILTRES NUMÉRIQUES

# 11.1 IMPLÉMENTATION DU FILTRAGE

- Filtrage rapide
- Filtrage par bloc; longs signaux

11-3

## Filtrage rapide

Utilisation de la propriété

$$\mathcal{F}_d\{h * f\}(\omega) = \mathcal{F}_d\{h\}(\omega) \times \mathcal{F}_d\{f\}(\omega)$$

Si  $f$  est de taille  $L$  et  $h$  de taille  $M$ , alors  $(h * f)$  est de taille  $L + M - 1$ .

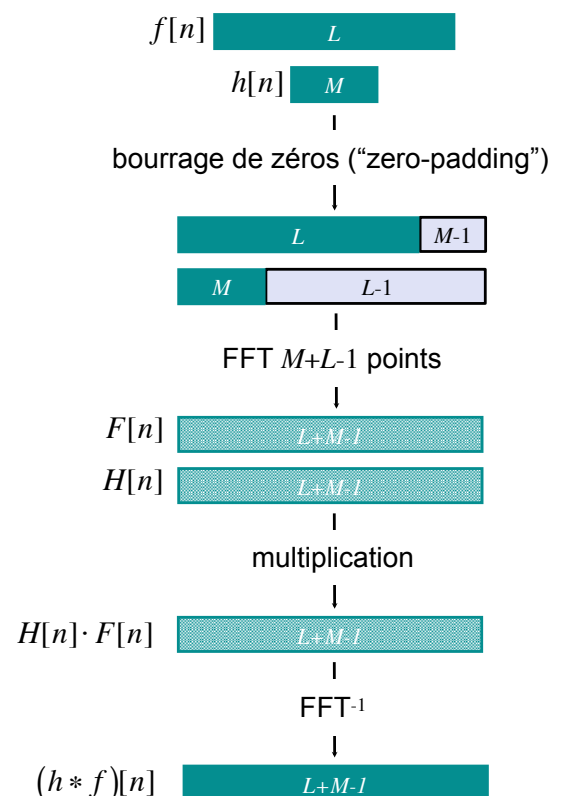
⇒ calcul de la DFT sur  $L + M - 1$  échantillons

⇒ **bourrage de zéros** pour atteindre cette taille  
zero-padding

### ■ Coût

- convolution temporelle:  $O(M \cdot L)$  ops
- FFT:  $O((M + L - 1) \log_2(M + L - 1))$  ops

⇒ gain pour  $M$  et  $L$  suffisamment grands

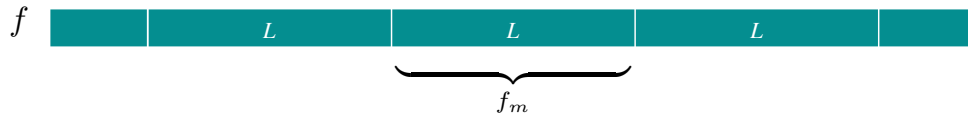


# Filtrage par bloc; longs signaux

## 1. Méthode d'addition des recouvrements (“*overlap add*”)

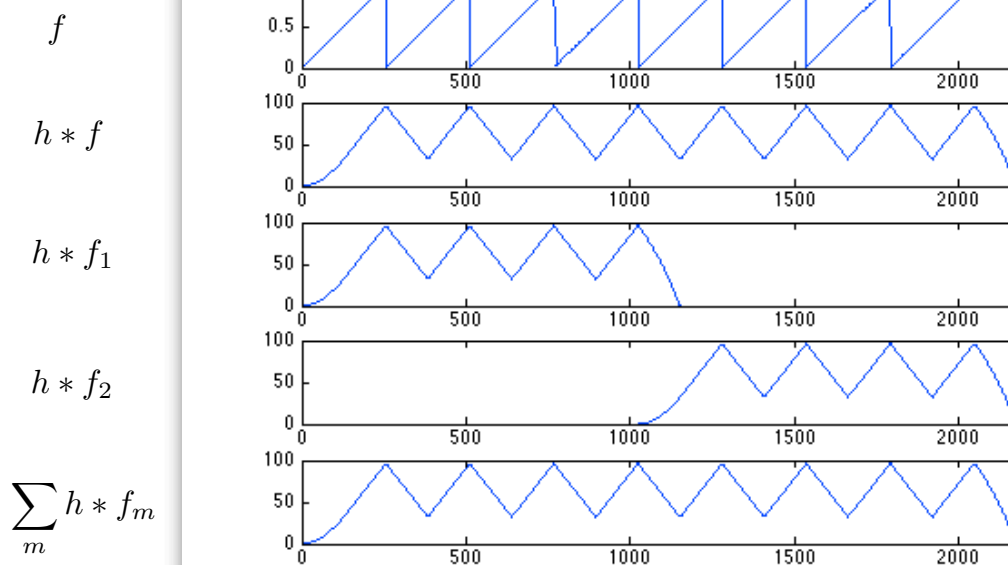
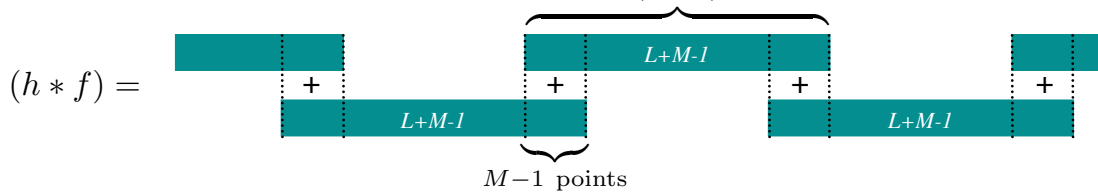
On décompose le signal à filtrer en **blocs** de taille  $L$ :

$$f[n] = \sum_m \underbrace{f[n] \cdot \mathbb{1}_{[0 \dots L-1]}[n - mL]}_{f_m[n]}, \quad n \in \mathbb{Z}$$



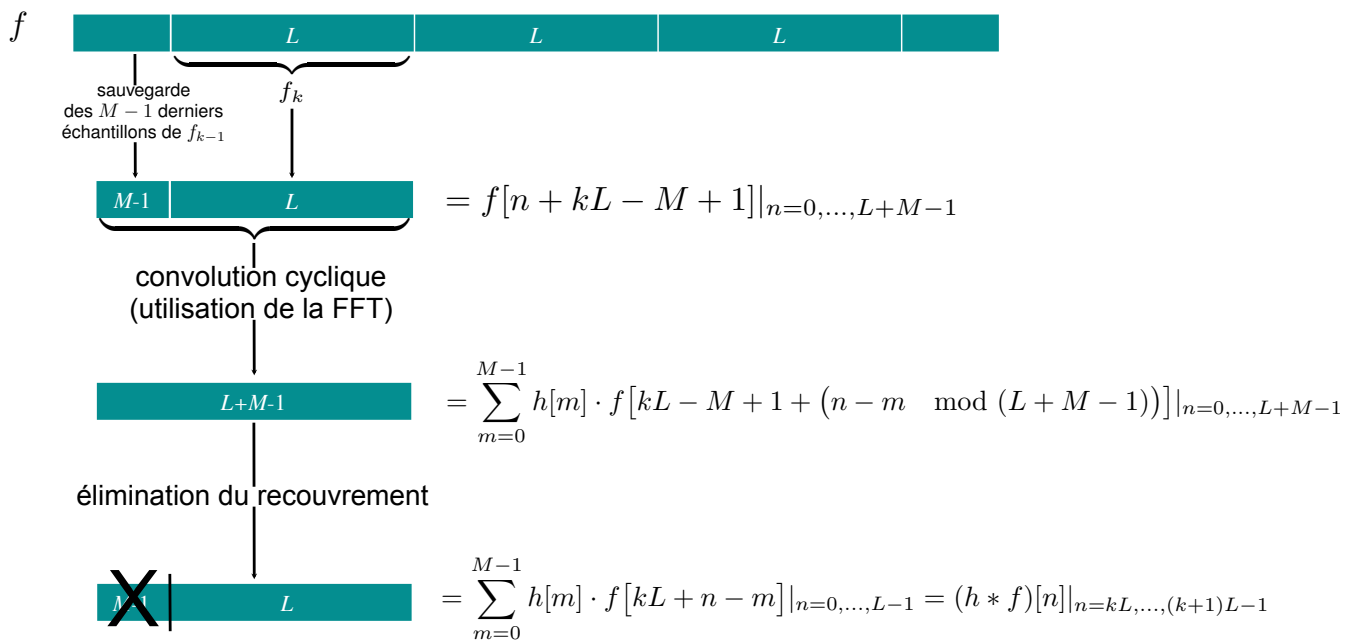
Le filtrage de  $f$  par un filtre  $h$  de taille  $M$  peut alors s'exprimer comme une somme de filtrages par  $h$  de blocs de taille  $L$  (implémentation FFT)

$$(h * f)[n] = \sum_m \underbrace{(h * f_m)[n]}_{\text{support} = L + M - 1}$$



## 2. Méthode de sauvegarde et élimination du recouvrement (“*overlap save*”)

On décompose le signal à filtrer en **blocs** de taille  $L$



## 11.2 ANALYSE DES FILTRES NUMÉRIQUES

- Pourquoi filtrer?
- Réponse fréquentielle
- Types de filtres
- Distortions
- Temps de propagation de groupe
- Filtres à phase linéaire



- DTFT de la réponse impulsionnelle  $h = S_h\{\delta\}$

$$H(e^{j\omega}) = \mathcal{F}_d\{h\}(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[n] e^{-j\omega n}$$

- Réponse à une sinusoïde discrète de fréquence  $\omega \in (-\pi, \pi]$

$$S_h\{e^{j\omega n}\}[n] = H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} \Rightarrow H(e^{j\omega}) = S_h\{e^{j\omega n}\}[0]$$

- Réponses en amplitude et en phase

$$H(e^{j\omega}) = A_H(\omega) \cdot e^{j\Phi_H(\omega)}$$

$$\text{avec } \begin{cases} A_H(\omega) = |H(e^{j\omega})| & \in \mathbb{R}^+ \\ \Phi_H(\omega) = \arg(H(e^{j\omega})) & \in (-\pi, \pi] \end{cases}$$

NB: amplitude et phase sont des fonctions  $2\pi$ -périodiques de  $\omega$ .

## Fonctions MatLab

`A=abs(B)`

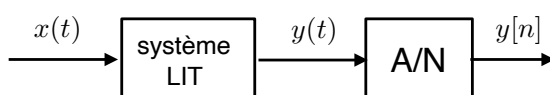
calcule le module du vecteur B

`A=angle(B)`

calcule la phase du vecteur de données B

## Pourquoi filtrer?

- 1) Pour corriger les distorsions analogiques = égalisation



Traitement numérique

$$\tilde{x}[n] = (h * y)[n] \approx x[n]$$

- 2) Pour supprimer le “bruit”

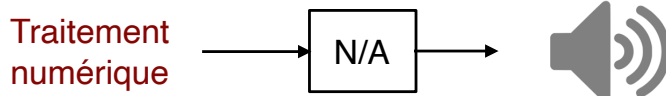
$$f[n] = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{signal utile}}}{s[n]} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bruit (souvent aléatoire)}}}{b[n]}$$

$$\tilde{s}[n] = (h * f)[n] \approx s[n]$$

$\Updownarrow$

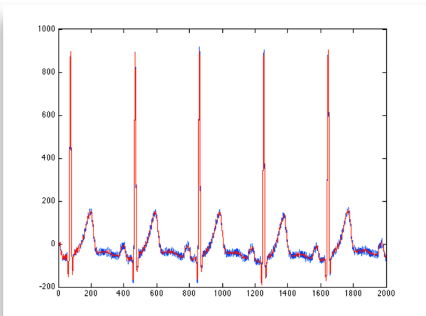
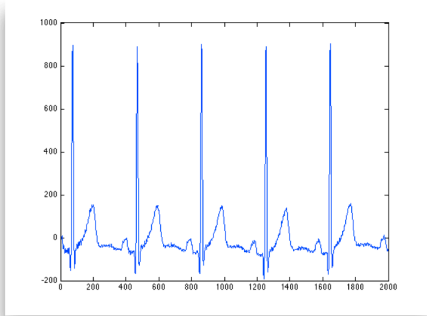
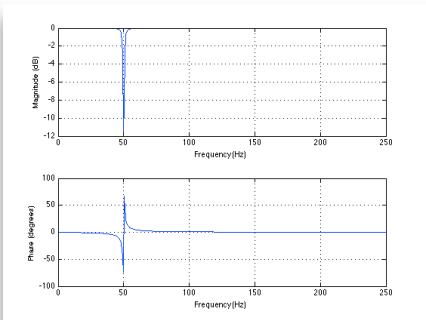
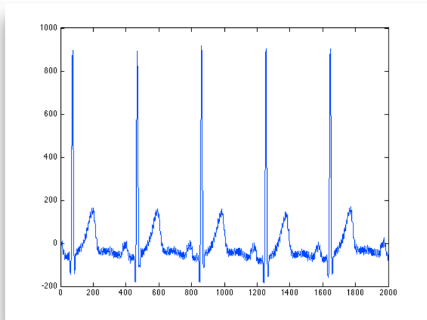
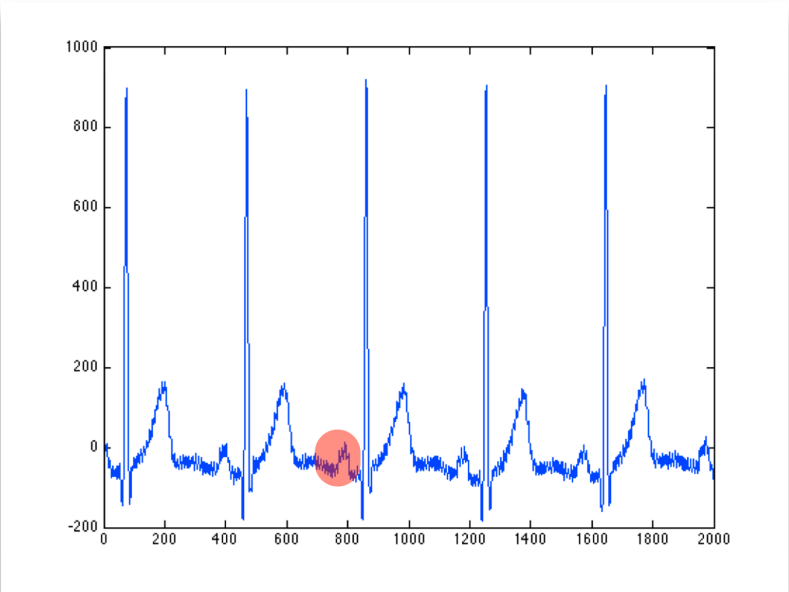
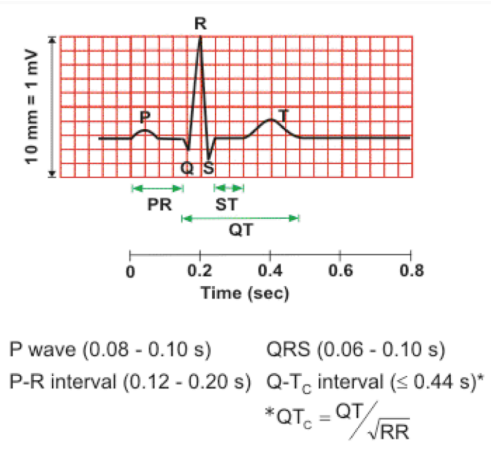
$$\tilde{S}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})S(e^{j\omega}) + H(e^{j\omega})B(e^{j\omega}) \approx S(e^{j\omega})$$

- 3) Pour préaccentuer



Dans les systèmes réels de mesure ou communication: souvent 1) + 2)

# Exemple: filtrage d'un ECG

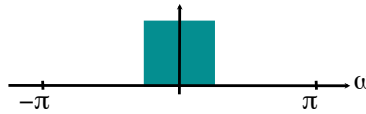


Elimination du 50 Hz

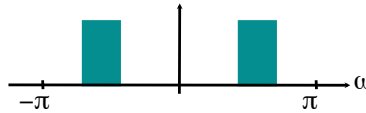
# Types de filtres

Comme pour les filtres analogiques, on classe les filtres en 4 classes principales, selon le support de leur DTFT

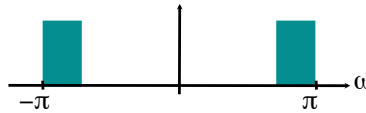
■ Passe-bas



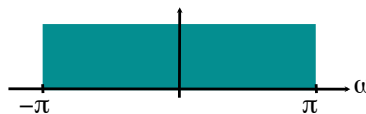
■ Passe-bande



■ Passe-haut



■ Passe-tout



**Rappel:** On ne trace la réponse fréquentielle d'un **filtre numérique** (ici son amplitude) qu'**entre**  $-\pi$  **et**  $\pi$ . D'autre part, la réponse impulsionnelle filtres usuels étant **réelle**, leur réponse fréquentielle satisfait la **symétrie Hermitienne**.

## Distorsions

Réponse fréquentielle:  $H(e^{j\omega}) = A_H(\omega)e^{j\Phi_H(\omega)}$

### ■ Distorsion d'amplitude ou atténuation

Mesure de l'écart relatif (expression en **décibels**) entre l'amplitude du filtre au centre de la bande passante  $\omega_c$  et son amplitude pour des fréquences quelconques

$$\text{Att}_H(\omega) = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{A_H(\omega)}{A_H(\omega_c)} \right) \text{dB}$$

### ■ Distorsion de phase ou temps de propagation de groupe

- Rappel: si  $h[n]$  caractérise un filtre numérique, alors la phase de la DTFT de  $h_{n_0}[n] = h[n - n_0]$  est modifiée **linéairement** par:  $\Phi_{H_{n_0}}(\omega) = \Phi_H(\omega) - \omega n_0 \mod 2\pi$ .

- **Temps de propagation de groupe:**  $\text{TPG}_h(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \Phi_H(\omega)$

- La distortion de phase est alors l'écart de  $\text{TPG}_h(\omega)$  par rapport à  $\text{TPG}_h(\omega_c)$ .

# Temps de propagation de groupe

## ■ Forme polaire de la réponse fréquentielle

$$\mathcal{F}_d\{h\}(\omega) = H(e^{j\omega}) = A_H(\omega)e^{j\Phi_H(\omega)}$$

$$\text{TPG}_h(\omega) = -\frac{d\Phi_H(\omega)}{d\omega}$$

Rappel:

- $z = a + jb = |z| \cdot e^{j\theta}$
- $\log(z) = \log|z| + j\theta$
- $\text{Im}(\log(z)) = \text{Re}(-j\log(z)) = \theta \pmod{2\pi}$

## ■ Formule différentielle pour le temps de propagation de groupe

$$\text{TPG}_h(\omega) = -\text{Re}\left(e^{j\omega} \frac{H'(e^{j\omega})}{H(e^{j\omega})}\right) \quad \text{avec} \quad H'(z) = \frac{dH(z)}{dz}$$

$$\text{En effet, } \Phi'_H(\omega) = \text{Im}\left(\frac{d}{d\omega} \log(H(e^{j\omega}))\right) = \text{Im}\left(\frac{H'(e^{j\omega})je^{j\omega}}{H(e^{j\omega})}\right).$$

Exemple: Décalage de  $n_0$  avec  $H(z) = z^{-n_0}$

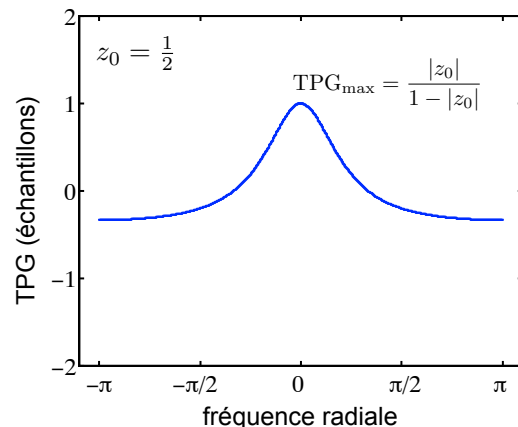
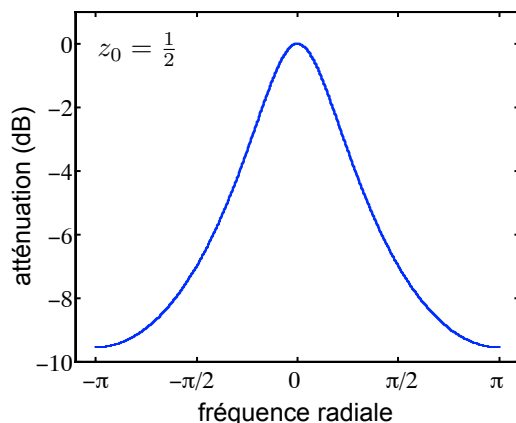
$$\frac{zH'(z)}{H(z)} = \frac{z(-n_0)z^{-n_0-1}}{z^{-n_0}} = -n_0 \Rightarrow \text{TPG}_H(\omega) = n_0$$

**Exemple:**  $H(z) = \frac{1}{1 - z_0 z^{-1}}$

avec  $z_0 = |z_0|e^{j\omega_0} \in \mathbb{C}$

$$A_H(\omega) = \frac{1}{|1 - z_0 e^{-j\omega}|}$$

$$\text{TPG}_h(\omega) = -\text{Re}\left(\frac{zH'(z)}{H(z)}\bigg|_{z=e^{j\omega}}\right) = \text{Re}\left(\frac{z_0 e^{-j\omega}}{1 - z_0 e^{-j\omega}}\right)$$



**NB:** les atténuations et TPG sont des quantités **additives** par convolution

$$\text{Att}_{h_1 * h_2}(\omega) = \text{Att}_{h_1}(\omega) + \text{Att}_{h_2}(\omega)$$

$$\text{TPG}_{h_1 * h_2}(\omega) = \text{TPG}_{h_1}(\omega) + \text{TPG}_{h_2}(\omega)$$

# Filtres à phase linéaire

Un filtre réel **sans distortion de phase**, c.-à-d. tel que  $\text{TPG}_h(\omega) = K$  (constante), est forcément à **phase linéaire**

$$\text{TPG}_h(\omega) = K \Leftrightarrow \frac{H(e^{j\omega})}{H(e^{-j\omega})} = e^{j(2\theta_0 - 2K\omega)}$$

(ce qui équivaut "moralement" à  $\Phi_H(\omega) = \theta_0 - K\omega$ )

Preuve basée sur la forme différentielle du TPG

Si  $h$  est un filtre réel avec  $H(e^{j\omega}) = A_H(\omega)e^{j\Phi_H(\omega)}$ , alors  $H(e^{j\omega})^* = H(e^{-j\omega}) = A_H(\omega)e^{-j\Phi_H(\omega)}$ .

En appliquant les règles de différentiation, on vérifie que

$$\left. \frac{H(e^{-j\omega})}{2je^{2Kj\omega}H(e^{j\omega})} \cdot \frac{d}{d\omega} \left( \frac{e^{2Kj\omega}H(e^{j\omega})}{H(e^{-j\omega})} \right) = \underbrace{\frac{e^{j\omega}H'(e^{j\omega})}{2H(e^{j\omega})} + \frac{e^{-j\omega}H'(e^{-j\omega})}{2H(e^{-j\omega})}}_{\text{Re}\left(\frac{e^{j\omega}H'(e^{j\omega})}{H(e^{j\omega})}\right)} + K \right\} \Leftrightarrow \frac{d}{d\omega} \left( \frac{e^{2Kj\omega}H(e^{j\omega})}{H(e^{-j\omega})} \right) = 0$$

$$= -\text{TPG}_H(\omega) + K = 0$$

Il s'ensuit que  $\frac{H(e^{j\omega})}{H(e^{-j\omega})} = e^{j2\Phi_H(\omega)} = \text{Const} \cdot e^{-2Kj\omega}$ , ce qui implique aussi que  $|\text{Const}| = 1$ .

Donc, il existe  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $2\Phi_H(\omega) = (2\theta_0 - 2K\omega) \mod 2\pi$ .

## Filtres à phase "constante"

■ Filtres symétriques:  $h[n] = h[-n], \forall n \in \mathbb{Z}$

- $H(e^{j\omega}) = A(\omega)$  avec  $A(\omega)$  réel,  $2\pi$ -périodique et t.q.  $A(\omega) = A(-\omega)$  (symétrie Hermitienne)  
 $\Rightarrow \frac{H(e^{j\omega})}{H(e^{-j\omega})} = 1$ ; c.à.d.  $2\theta_0 = 0$  et  $K = 0$ .

■ Filtres anti-symétriques:  $h[n] = -h[-n], \forall n \in \mathbb{Z}$

- $H(e^{j\omega}) = jB(\omega)$  avec  $B(\omega)$  réel,  $2\pi$ -périodique et t.q.  $B(\omega) = -B(-\omega)$   
 $\Rightarrow \frac{H(e^{j\omega})}{H(e^{-j\omega})} = -1$ ; c.à.d.  $2\theta_0 = \pi$  et  $K = 0$ .

■ Filtres à phase linéaire réalisables

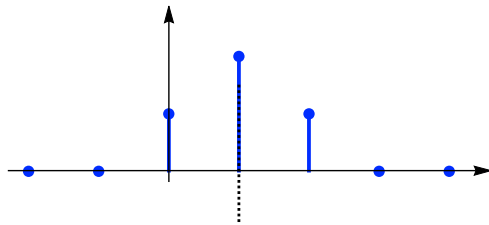
Le filtre réel à phase linéaire est réalisable sous forme rationnelle si  $\frac{H(e^{j\omega})}{H(e^{-j\omega})} = \pm e^{-jN\omega}$   
 avec  $N \in \mathbb{Z}$ ; c.à.d. quand  $2\theta_0 \in \{0, \pi\}$  et  $K = N/2$ .

## Filtres réalisables à phase linéaire

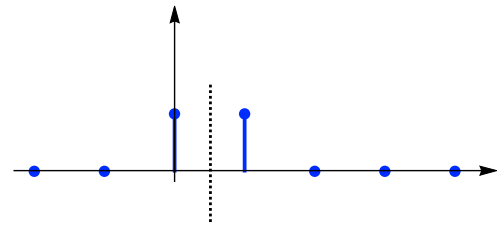
Condition nécessaire et suffisante pour que  $H(z)$  soit réalisable et à phase linéaire

$$H(z) = \epsilon z^{-N} H(z^{-1}) \text{ avec } \epsilon = e^{j2\theta_0} \in \{+1, -1\} \Leftrightarrow \text{TPG}_h(\omega) = N/2 = K$$

■ Filtres symétriques à phase linéaire:  $\epsilon = +1$

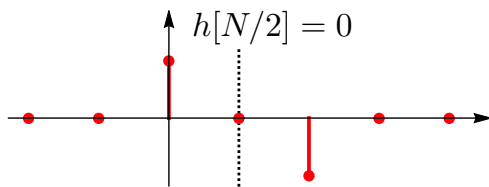


Type 1:  $\epsilon = +1$ ,  $N$  pair

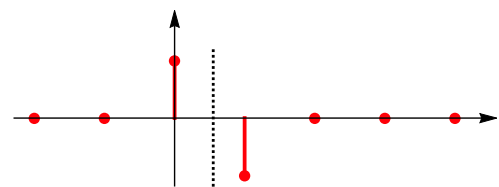


Type 2:  $\epsilon = +1$ ,  $N$  impair

■ Filtres anti-symétriques à phase linéaire:  $\epsilon = -1$



Type 3:  $\epsilon = -1$ ,  $N$  pair



Type 4:  $\epsilon = -1$ ,  $N$  impair

## 11.3 SYNTHÈSE DE FILTRES NUMÉRIQUES

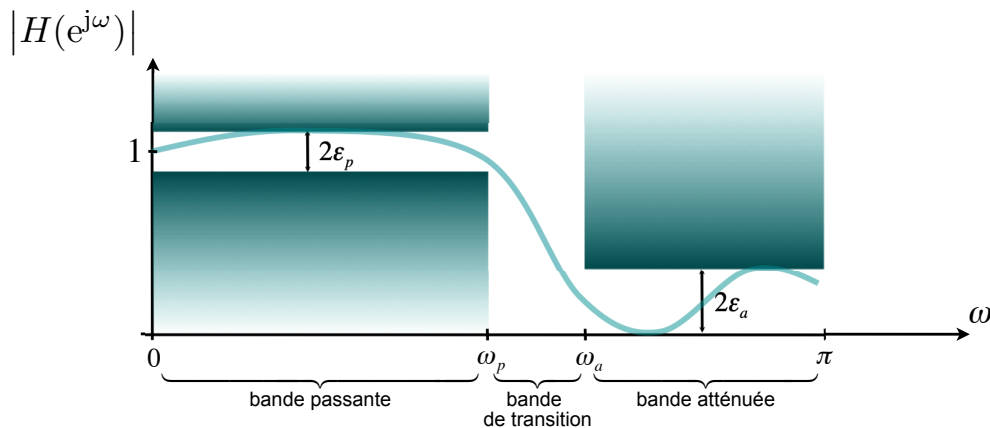
- Gabarit de filtre
- Synthèse à partir d'un filtre analogique
  - Echantillonnage de la réponse impulsionnelle
  - Transformation bilinéaire
- Synthèse directe de filtres numériques
  - Placement des pôles et zéros
  - Critère  $L_2$
  - Critère de Tchébychev

## Gabarit de filtre

Les filtres idéaux n'étant pas réalisables, il faut faire des compromis

- Fluctuations dans la bande passante ( $1 \pm \epsilon_p$ )
- Zone de transition (largeur  $\Delta = |\omega_p - \omega_a|$ )
- Fluctuations dans la bande bloquante ( $0 \pm \epsilon_a$ )

Exemple de **spécifications** pour un filtre passe-bas



**Remarque:** le gabarit d'un filtre passe-bas est symétrique de celui d'un filtre passe-haut par rapport à  $\omega = \pi/2$ ;  $H(z)$  passe-bas  $\Leftrightarrow H(-z)$  passe-haut

## Synthèse à partir d'un filtre analogique

Lorsque les signaux **discrets** sont obtenus par échantillonnage à la fréquence  $1/T$  de signaux à temps **continu**, les filtres discrets peuvent être également issus de filtres à temps continu selon la formule (en notant  $\hat{h}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} h(t)e^{-j\omega t} dt$ )

$$\tilde{h}[n] = \int_{\mathbb{R}} h(\tau) \text{sinc}\left(\frac{nT - \tau}{T}\right) d\tau = \left(h * \text{sinc}\left(\frac{\cdot}{T}\right)\right)(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} T \cdot \hat{h}(\omega) e^{jnT\omega} d\omega$$

**Preuve:**  $y(t) = (h * x)(t)$

$$\left. \begin{aligned} &= \left(h * \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(kT) \cdot \text{sinc}\left(\frac{\cdot - kT}{T}\right)\right)(t) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(kT) \cdot \left(h * \text{sinc}\left(\frac{\cdot - kT}{T}\right)(t)\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underbrace{y(nT)}_{y[n]} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \underbrace{x(kT)}_{x[k]} \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}} h(\tau) \text{sinc}\left(\frac{nT - \tau - kT}{T}\right) d\tau}_{\tilde{h}[n-k]}$$

### ■ Méthode d'échantillonnage de la réponse impulsionnelle

Si l'on peut faire l'approximation que  $h(t)$  est à bande limitée dans  $[-\pi/T, \pi/T]$ , alors on a  $h[n] = T \cdot h(nT)$ .

**Exemple:**  $h(t) = e^{-s_0 t} u(t)$ . Alors  $h[n] = T \cdot e^{-s_0 nT} u[n]$  avec  $H(z) = \frac{T}{1 - e^{-s_0 T} z^{-1}}$ .

## Méthode d'approximation de la réponse fréquentielle

Une solution meilleure que l'approximation de la réponse impulsionnelle est d'approcher la réponse fréquentielle. Soit

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

et 
$$\tilde{h}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} T \cdot \hat{h}(\omega) e^{jnT\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{h}(\xi/T) e^{jn\xi} d\xi$$

Les deux formules sont équivalentes si  $H(e^{j\omega}) = \hat{h}(\omega/T)$  pour  $|\omega| \leq \pi$ .

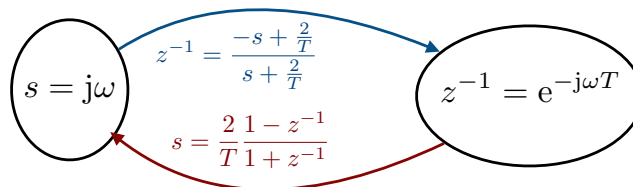
Donc, une bonne approximation du filtre analogique est une approximation qui réalise  $H(e^{j\omega}) \approx \hat{h}(\omega/T)$  pour  $\omega \in [-\pi, \pi]$ .

## Transformation bilinéaire

On souhaite approcher  $\hat{h}(\omega)$  à l'aide d'une fonction  $(2\pi/T)$ -**périodique**  $H(e^{j\omega T})$ .

Méthode: approcher la fréquence  $\omega$  elle-même à l'aide d'une fonction  $(2\pi/T)$ -périodique.

Transformation bilinéaire:



Justification:  $e^{\pm j\omega T} = 1 \pm j\omega T + O(\omega^2 T^2)$  (série de Taylor), d'où l'approximation

$$e^{-j\omega T} = \frac{e^{-j\omega T/2}}{e^{j\omega T/2}} \approx \frac{1 - \frac{j\omega T}{2}}{1 + \frac{j\omega T}{2}} = \frac{-j\omega + \frac{2}{T}}{j\omega + \frac{2}{T}}.$$

Transformation dans le plan complexe:  $z^{-1} = \frac{-s + c}{s + c} \Leftrightarrow s = c \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$  avec  $z = e^{j\omega T}$ ,  $s = j\omega$ ,  $c = \frac{2}{T}$ .

La réponse fréquentielle qui approche la transformée de Fourier du filtre est donc donnée par

$$H_{\text{bilinéaire}}(e^{j\omega}) = \hat{h}\left(\frac{2}{jT} \frac{1 - e^{-j\omega T}}{1 + e^{-j\omega T}}\right)$$

### ■ Propriété: Conservation de la stabilité

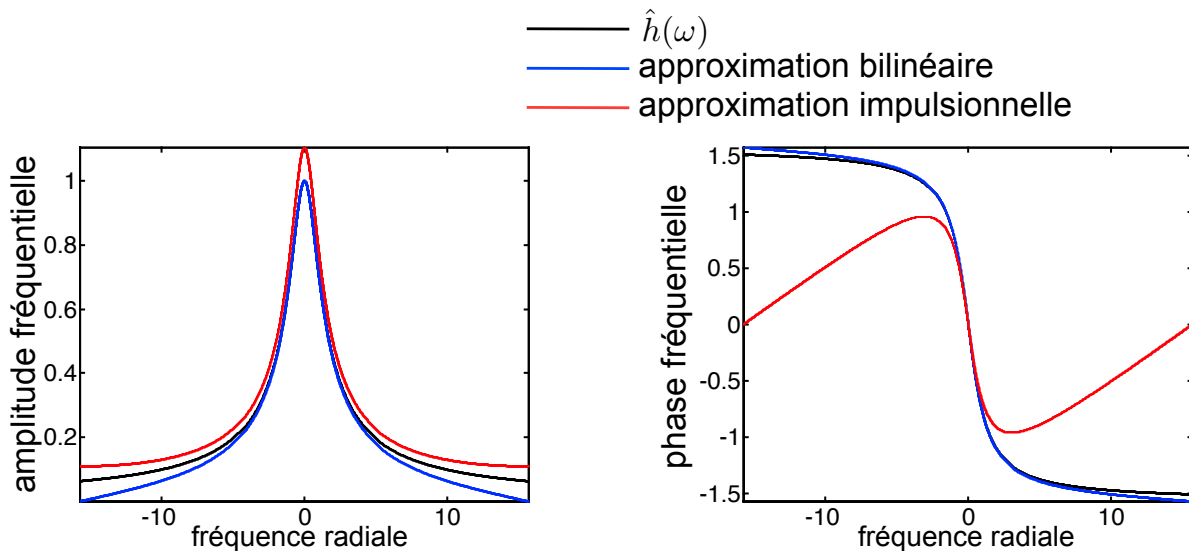
$\hat{h}(\omega)$  est une fraction rationnelle en  $j\omega$  et le filtre continu est stable BIBO



$H_{\text{bilinéaire}}(e^{j\omega})$  est une fraction rationnelle en  $e^{j\omega}$  et le filtre discret est stable BIBO



Approximations du filtre:  $h(t) = e^{-t}u(t)$



La transformation bilinéaire permet de recycler toutes les classes de filtres analogiques (Butterworth, Tchebychev etc...) en des filtres numériques.

## Synthèse directe de filtres numériques

Le traiteur de signal moderne est confronté le plus fréquemment à des signaux numériques purs, sans nécessité de recourir à l'équivalence analogique.

Selon le sens que l'on donne au verbe "minimiser", plusieurs techniques existent alors pour synthétiser des filtres, le but étant toujours

- de minimiser l'amplitude de la réponse dans la bande atténuée
- de limiter la distortion dans la bande passante
- de rendre la bande de transition la plus étroite possible

On peut ainsi forcer le filtre à avoir un **gain** minimal—ou au contraire, maximal—pour **certaines** valeurs de la fréquence  $\omega$  (placement de pôles et de zéros).

Dans le cas de la synthèse de **filtres FIR**, on peut simplement tronquer le filtre idéal ou plus généralement, le multiplier par une **fenêtre** à support fini.

On peut aussi minimiser le carré de l'erreur moyenne entre le filtre et son gabarit (critère  $L_2$ ); ou bien minimiser le maximum de l'erreur moyenne entre le filtre et son gabarit (**critère de Tchébychev**).

# Synthèse par placement des pôles et zéros

Comme dans le cas analogique, les **zéros** et les **pôles** d'un filtre RII permettent de spécifier la **bande passante** et la **bande atténuée**. Ainsi, soit la fonction de transfert

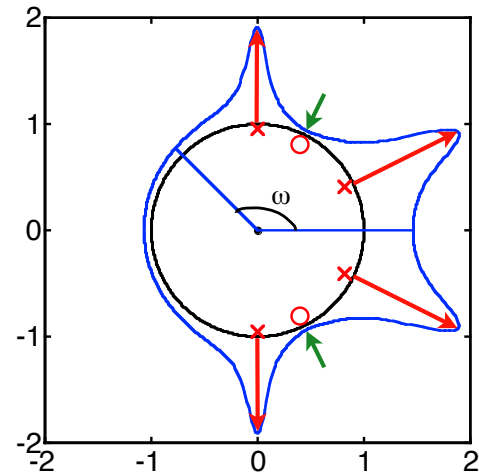
$$H(z) = \gamma \cdot \frac{\prod_{m=1}^M (1 - z_{0,m} z^{-1})}{\prod_{n=1}^N (1 - z_{p,n} z^{-1})}$$

On obtient la réponse fréquentielle en évaluant  $H(z)$  pour  $z = e^{j\omega}$ ; son amplitude est donnée par

$$H(e^{j\omega}) = \gamma \cdot \frac{\prod_{m=1}^M (\text{distance de } z_{0,m} \text{ à } e^{j\omega})}{\prod_{n=1}^N (\text{distance de } z_{p,n} \text{ à } e^{j\omega})}$$

zéro → effet attractif

pôle → effet répulsif



Pour ce qui est du TPG du filtre, on a (additivité des TPG)

$$\text{TPG}_H(\omega) = \sum_{m=1}^M \text{TPG}_{(1-z_{0,m}z^{-1})}(\omega) - \sum_{n=1}^N \text{TPG}_{(1-z_{p,n}z^{-1})}(\omega)$$

où  $\text{TPG}_{(1-z_k z^{-1})}(\omega) = -\text{Re} \left( \frac{z_k e^{-j\omega}}{1 - z_k e^{-j\omega}} \right)$  avec  $z_k = |z_k| e^{j\phi_k}$

L'extremum du TPG d'un filtre élémentaire  $1 - z_k z^{-1}$  est atteint pour  $\omega_k = \phi_k$  et on a  $\text{TPG}_{(1-z_k z^{-1})}(\omega_k) = -\frac{|z_k|}{1-|z_k|} < 0$  si  $|z_k| < 1$ . Donc

- quand  $|z_{p,n}| < 1$  (filtre causal-stable), le TPG maximum de  $\frac{1}{1-z_{p,n}z^{-1}}$  est positif  
→ retard de groupe
- quand  $|z_{0,m}| < 1$ , le TPG maximum de  $1 - z_{0,m}z^{-1}$  est négatif  
→ contrebalancer le retard de groupe dû aux pôles

## ■ En résumé

- filtre à **RII réelle** ⇒ pôles et zéros complexes par paires conjuguées
- filtre **causal-stable** ⇒ pôles à l'intérieur du cercle unite
- filtre à **phase linéaire** (FIR) ⇒ zéros par paires réciproques  
 $P(z) = \pm z^{-N} P(z^{-1}) : P(z_k) = 0 \Rightarrow P(z_k^{-1}) = 0$

## Filtres passe-tout

Pour que la réponse d'amplitude d'un filtre  $H(e^{j\omega})$  soit constante, il faut que la distortion d'amplitude des zéros compense exactement celle des pôles; soit  $|H(e^{j\omega})|^2 = H(z)H^*(z^{-1})|_{z=e^{j\omega}} = \gamma^2 = \text{Const.}$  Un tel filtre **passe-tout** est nécessairement de la forme

$$H(z) = \gamma z^N \frac{P(z)}{P^*(z^{-1})}$$

où  $P(z)$  est un polynôme en  $z^{-1}$ , et  $P^*(z)$  est le polynôme obtenu en prenant le complexe conjugué des coefficients de  $P(z)$ .

Preuve: posons  $H(z) = P(z)/Q(z)$ , alors la condition passe-tout équivaut à  $P(z)P^*(z^{-1}) \propto Q(z)Q^*(z^{-1})$ . Comme  $Q(z)$  ne divise pas (est premier avec)  $P(z)$ , on en déduit que  $Q(z) = \gamma z^N P^*(z^{-1})$ .

Caractérisation équivalente:  $H(z)$  est un filtre passe-tout si et seulement si à tout zéro  $z_{0,m}$  correspond un pôle  $z_{p,m} = 1/z_{0,m}^*$  et vice versa.

Vérification: La distance de  $1/z_{0,m}^*$  à  $e^{j\omega}$  peut s'écrire comme

$$\begin{aligned} \left| e^{j\omega} - \frac{1}{z_{0,m}^*} \right| &= \left| e^{-j\omega} - \frac{1}{z_{0,m}} \right| = \left| \left( \frac{e^{-j\omega}}{z_{0,m}} \right) (z_{0,m} - e^{j\omega}) \right| \\ &= \frac{1}{|z_{0,m}|} |e^{j\omega} - z_{0,m}| \propto \text{distance de } z_{0,m} \text{ à } e^{j\omega} \end{aligned}$$

## Synthèse de filtres RIF—Critère $L_2$

On choisit la mesure (**quadratique**) suivante

$$\xi(H) = \int_{\text{bande passante}} |1 - H(e^{j\omega})|^2 d\omega + \int_{\text{bande atténuée}} |0 - H(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

Plus ce nombre est proche de 0, plus le filtre  $H$  est proche du filtre idéal. Par contre, certains points fréquentiels peuvent ne pas tendre vers zéro (**effet de Gibbs**). On limite ce phénomène en autorisant une plus grande bande de transition.

L'avantage de la mesure  $L_2$  est que le minimum est unique, et solution d'un **système linéaire** d'équations. Exemple de résultat:

### Fonction Matlab

`H=firls(N,F,A)`

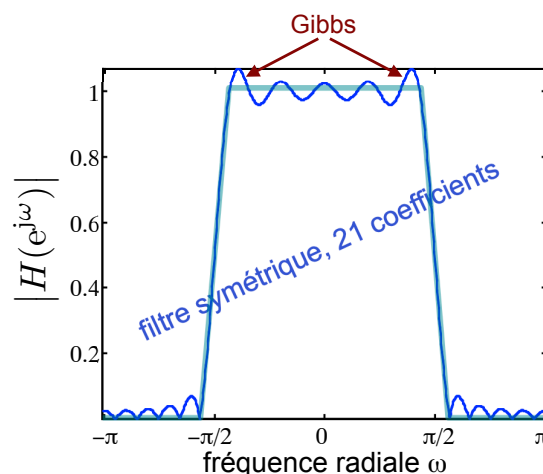
→  $H$ =filtre symétrique de degré  $N$  (support  $N+1$ )

$F$ =bandes de fréquences normalisée (début-fin);

e.g.:  $[0 \ \omega_p \ \omega_a \ \pi]/\pi$

$A$ =amplitude dans les bandes

e.g.:  $[1 \ 1 \ 0 \ 0]$



# Synthèse de filtres RIF—Critère de Tchébychev

On choisit la mesure (**Tchébychev** ou **minimax**) suivante

$$\xi(H) = \max \left( \sup_{\text{bande passante}} |1 - H(e^{j\omega})|, \sup_{\text{bande atténuée}} |0 - H(e^{j\omega})| \right)$$

Plus ce nombre est proche de 0, plus le filtre est proche du filtre idéal. À la différence du critère  $L_2$ , il n'y a pas d'effet de Gibbs.

Un algorithme **itératif** très efficace dû à Parks et McLellan permet de calculer le filtre minimisant ce critère: l'algorithme d'échange de **Remez**. Le résultat est un filtre à ondulation uniforme (equiripple). Exemple de résultat:

## Fonction Matlab

`H=remez(N,F,A)`

→ H=filtre symétrique de degré N (support N+1)  
F=bandes de fréquences normalisée (début-fin);  
e.g.:  $= [0 \ \omega_p \ \omega_a \ \pi] / \pi$   
A=amplitude dans les bandes  
e.g.:  $= [1 \ 1 \ 0 \ 0]$

